学校编号：10384　　分类号：________ 密级：________
学　　号：200323020　　UDC：____________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

一类拟线性吸收退化抛物方程的奇异解问题

Singular Solution Of A Quasilinear Convection Diffusion Degenerate Parabolic Equation With Absorption

张　培　欣

指导教师姓名：　赵俊宁　教授

专 业 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2006 年 5 月

论文答辩日期：　2006 年　月

学位授予日期：　2006 年　月

答辩委员会主席：________

评　阅　人：________

2006 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）.

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目 录

Contents

摘　　要

在这篇文章中我们讨论下面方程的初值问题的非负非平凡解的存在性问题

$$u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(u) - u^q \quad (x,t) \in S_T = R^N \times (0,T) \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0 \qquad x \in R^N \backslash \{0\} \tag{2}$$

其中 $p > 2$, $q > 0$, $b_i(s) \in C^1(R)$.

首先假设

$$|b_i^{'}(s)| \leqslant M s^{m-1} \qquad s \geqslant 0$$

我们证明了若 $p > 2$ 成立，当 $0 < q < p - 1 + \frac{p}{N}$ ， $0 \leqslant m < p - 1 + \frac{p}{N}$ 时，则方程 (1) 及初值为

$$u(x,0) = \delta(x) \quad x \in R^N \qquad (\delta(x) \text{ 是中心在原点的 Dirac 函数}) \tag{3}$$

时存在弱解；当 $q > p - 1 + \frac{p}{N}$ ， $0 \leqslant m \leqslant \frac{q(p+Np-N-1)}{p+Np-N}$ 时，问题 (1)(3) 没有解；当 $p - 1 < q < p - 1 + \frac{p}{N}$ ， $0 \leqslant m < q$ 时，问题 (1)(2) 有一个非常奇异解，即方程的一个解 ω 具有下列性质：

$$\omega \in C(\bar{S}_T \backslash \{(0,0)\})$$

$$\omega(x,0) = 0 \qquad \forall\, x \in R^N \backslash \{0\}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{|x|<r} \omega(x,t)dx = \infty \qquad \forall\, r > 0;$$

当 $q > p - 1 + \frac{p}{N}$ ， $0 < m < q - \frac{p}{2N}$ 时，问题 (1)(2) 没有非常奇异解。在本文中所用的方法和文献 [1] 类似。

关键词: P-Laplace 方程；初值问题；非平凡解。

Abstract

In this paper we discussed the Cauchy problem

$$u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(u) - u^q \quad (x,t) \in S_T = R^N \times (0,T) \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0 \quad x \in R^N \backslash \{0\} \tag{2}$$

where $p > 2$, $q > 0$, $b_i(s) \in C^1(R)$.

In this paper, we are interested in the existence and nonexistence of non-negative and non-trivial solution of Cauchy problem (1)with initial data

$$u(x,0) = \delta(x) \quad x \in R^N \tag{3}$$

where $\delta(x)$ denotes the Dirac mass centered at the origin.

Let

$$|b_i'(s)| \leqslant M s^{m-1} \qquad s \geqslant 0$$

We have proved that let $p > 2$, if $0 < q < p - 1 + \frac{p}{N}$, $0 \leqslant m < p - 1 + \frac{p}{N}$, then (1)(3) has a solution; if $q > p - 1 + \frac{p}{N}$, $0 \leqslant m \leqslant \frac{q(p+Np-N-1)}{p+Np-N}$, then(1)(3) has no solution; if $p - 1 < q < p - 1 + \frac{p}{N}$, $0 \leqslant m < q$, then (1)(2) has a very singular solution, i.e. a solution ω with the following properties:

$$\omega \in C(\bar{S}_T \backslash \{(0,0)\})$$

$$\omega(x,0) = 0 \qquad \forall\ x \in R^N \backslash \{0\}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{|x|<r} \omega(x,t)dx = \infty \quad \forall\ r > 0;$$

if $q > p - 1 + \frac{p}{N}$, $0 < m < q - \frac{p}{2N}$, then (1)(2) has no very singular solution. Here we use the methods similar to that in [1].

Key word:P-Laplace equation; Cauchy Problem; Non-trivial solution.

第一节 引　言

许多扩散现象可以归结为以下方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \frac{\partial}{\partial x_i}b_i(u) + \lambda u^q$$

其中 $p>1$，$q>0$，λ 是常数, 此处重复指标表示从 1 到 N 求和。方程中 $\frac{\partial}{\partial x_i}b_i(u)$ 描述扩散过程中的对流干扰项，非线性项 λu^q 描述扩散过程中的非线性源，当 $\lambda>0$ 时称为 " 热源 "，当 $\lambda<0$ 时称为 " 冷源 "，也称为吸收项，正如扩散过程所表现的那样，非线性源的出现将对解的性质产生一系列的影响。例如当存在 " 热源 " 时，方程的解可能出现 Blow-up 现象，即解在有限时间内可能无界，此时为使方程存在广义解，对初值 $u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0, x\in R^N$ 的增长阶限制比 $\lambda=0$ 的情形更严；当存在 " 冷源 " 时，对初值 u_0 的增长阶限制比 $\lambda=0$ 的情形更宽，在某些情形下对任意 $u_0\in L^1_{loc}(R^N)$ 都有解。

上面方程都有相应的物理背景：考虑单相渗流问题。假设有一种可压流体在均匀、各向同性的刚性多孔介质中流动。由质量守恒定律得

$$\theta\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\overrightarrow{V}) = 0 \tag{1}$$

其中 θ 为介质的孔隙率（此时是常数），ρ 为流体的密度，$\overrightarrow{V}$ 为流体的渗流速度。当我们考虑非 Newton 流体（例如拟塑性流体）时，需要计及流量的大小、分子与离子效应等诸多因素的影响，线性的 Darcy 定律不再成立，代替它的是下列非线性关系：

$$\rho\overrightarrow{V} = -\lambda|\nabla P|^{\alpha-1}\nabla P \tag{2}$$

其中 $\rho\overrightarrow{V}$ 和 P 分别表示流体的动量密度和压力， $\lambda>0$ 和 $\alpha>0$ 是某物理常数。改变变量和记号，它就化成非 Newton 渗流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \tag{3}$$

如果所考虑的是多方气体，则压力和密度满足下列状态方程

$$P = c\rho^\gamma$$

其中 c 和 γ 都是正常数。于是由 (1) 和 (2) 得

$$\theta\frac{\partial\rho}{\partial t}=c^{\alpha}\lambda div(|\rho^{\gamma}|^{\alpha-1}\rho^{\gamma})$$

改变变量和记号，它就化成非 Newton 多方渗流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=div(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m) \tag{4}$$

其中 $m>0,\ p>1.$

易见，方程 (4) 可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+m^{p-1}(m-1)(p-1)u^{mp-p-m}|\nabla u|^p,$$

其中

$$a^{ij}=m^{p-1}u^{(m-1)(p-1)}|\nabla u|^{p-2}(\delta_{ij}+(p-2)|\nabla u|^{-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}),$$

此处重复指标也表示从 1 到 N 求和。显然对 $\xi\in R^N$ ，有

$$\min\{1,p\}a_0(u,\nabla u)|\xi|^2\leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\max\{1,p\}a_0(u,\nabla u)|\xi|^2,$$

其中

$$a_0(u,\nabla u)=m^{p-1}u^{(m-1)(p-1)}|\nabla u|^{p-2}.$$

由于当 $a_0(u,\nabla u)\neq 0$ 时,

$$\lim_{\kappa\to 0}a_0(\kappa u,\nabla(\kappa u))=\begin{cases}0, & \text{如果}\quad p>1+\frac{1}{m},\\ \infty, & \text{如果}\quad p<1+\frac{1}{m}.\end{cases}$$

因此，称 $p>1+\frac{1}{m}$ 为慢速扩散情形，而称 $p<1+\frac{1}{m}$ 为快速扩散情形。由于方程 (3) 和 (4) 在慢速扩散情形下具有退化性，而在快速扩散情形下具有奇异性，所以它们一般没有古典解。

对于 p-Laplace 方程 (3) 的研究在 30 多年前就已经开始 ([2][3][4]) ，近年来随着对 Newton 渗流方程研究的深入，这类方程的研究也得到迅速发展 ([5][6][7]) 。关于解的存在唯一性、解的正则性、解的初始迹问题以及解的分界面的正则性等理论已日趋完善。对非 Newton 多方渗流方程 (4) 的研究也平行的进展 ([8][9][10][11]) 。

在这篇文章中我们讨论下面方程的初值问题

$$u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(u) - u^q \qquad (x,t) \in S_T = R^N \times (0,T) \tag{5}$$

$$u(x,0) = 0 \qquad x \in R^N \backslash \{0\} \tag{6}$$

其中 $p > 2$, $q > 0$, $b_i(s) \in C^1(R)$.

当方程的初始值为测度时它是一类物理现象的数学模型。若 $p = 2$ ， $b_i(u) = 0$ ，在文献 [12] 中给出当 $0 < q < 1 + \frac{2}{N}$ 时，问题 (5) 有一个满足下面初值的解

$$u(x,0) = \delta(x) \quad x \in R^N \tag{7}$$

这里 $\delta(x)$ 是中心在原点的 Dirac 函数，而且当 $q \geqslant 1 + \frac{2}{N}$ 时，问题 (5)(7) 没有解。在文献 [13] 和 [14] 中给出若 $p \geqslant 2$ 且 $p - 1 < q < p - 1 + \frac{p}{N}$ 时，方程 (5)(6) 有一个非常奇异解，即方程的一个解 ω 具有下列性质：

$$\omega \in C(\bar{S}_T \backslash \{(0,0)\}) \tag{8}$$

$$\omega(x,0) = 0 \qquad \forall\, x \in R^N \backslash \{0\} \tag{9}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{|x|<r} \omega(x,t)dx = \infty \qquad \forall\, r > 0 \tag{10}$$

在这篇文章里我们研究了初值问题 (5)(6) 在对流项 $\frac{\partial}{\partial x_i} b_i(u)$ 干扰下非常奇异解的存在性问题。若 $p = 2$ ， $b_i(u) = u^m$ ，文献 [15][16] 中证明了当 $1 < q < 1 + \frac{2}{N}$ 以及 $1 < m < 1 + \frac{1}{N}$ 时，问题 (5)(7) 有唯一解；当 $q \geqslant 1 + \frac{2}{N}$ 以及 $1 < m \leqslant \frac{p+1}{2}$ 时，问题 (5)(6) 没有非常奇异解；当 $1 < q < 1 + \frac{2}{N}$ 以及 $1 < m \leqslant \frac{p+1}{2}$ 时，问题 (5)(6) 有一个非常奇异解。在本文中所用的方法和文献 [1] 类似。我们假设

$$|b_i'(s)| \leqslant M s^{m-1} \qquad s \geqslant 0 \tag{11}$$

我们将证明下列定理：

定理 1 假设 (11) 成立且当 $p>2$， $0<q<p-1+\frac{p}{N}$， $0\leqslant m<p-1+\frac{p}{N}$ 时，问题 (5)(7) 有一个解；

定理 2 假设 (11) 成立且当 $p>2$， $q>p-1+\frac{p}{N}$， $0\leqslant m\leqslant\frac{q(p+Np-N-1)}{p+Np-N}$ 时，问题 (5)(7) 没有解；

定理 3 假设 (11) 成立且当 $p>2$， $p-1<q<p-1+\frac{p}{N}$， $0\leqslant m<q$ 时，问题 (5)(6) 有一个非常奇异解；

定理 4 假设 (11) 成立且当 $p>2$， $q>p-1+\frac{p}{N}$， $0<m<q-\frac{p}{2N}$ 时，问题 (5)(6) 没有非常奇异解。

第二节 定理 1 的证明

为证明定理，首先确定一些符号的意义。 $C^k(\Omega)$ 表示在 Ω 上 k 次可微的函数全体的集合。$C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中支集为 Ω 的紧子集的函数全体所构成的集合；$C_0^0(\Omega)$ 简记为 $C_0(\Omega)$ 。 $L^p(\Omega)$ 表示集合 $\{u|(\int_\Omega |u|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant C, C\text{为常数}\}$ ， $\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^p)^{\frac{1}{p}}$ ； $L^\infty(\Omega)$ 是在 Ω 上与一个有界函数几乎处处相等的可测函数全体；$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\limits_{\substack{E\subset\Omega\\ \mu(E)=0}} \sup\limits_{x\in\Omega\setminus E} |u(x)|$；也记为 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup|u(x)|$ 。$C(0,T;L^p(\Omega))$ 表示集合 $\{u|\|u\|_{L^p(\Omega)} \in C((0,T))\}$ 。$L^p_{loc}(\Omega)$ 表示集合 $\{u|(\int_{\Omega_1} |u|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant C, \Omega_1\text{是}\Omega\text{的紧子集}, C\text{为常数}\}$ 。 $W^k(\Omega)$ 表示在 Ω 上 k 次弱可微的函数全体。 $W^{k,p}(\Omega)$ 表示集合 $\{u|u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, 对满足 $|\alpha| \leqslant k$ 的任意 $\alpha\}$ 赋以范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = (\int_\Omega |\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha u|^p)^{\frac{1}{p}}$$

后得到的线性赋范空间。 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包。

$L^p_{loc}(0,T;W^{k,p}(\Omega))$ 表示集合 $\{u|(\int_0^T \|u\|^p_{W^{k,p}(\Omega_1)})^{\frac{1}{p}} \leqslant C, \Omega_1\text{是}\Omega\text{的紧子集}, C\text{为常数}\}$ 。

为了证明本文的结论，需要给出方程 (5) 解的定义。

定义 1 一个非负函数 $u(x,t),(x,t) \in S_T$ 是问题 (5)(7) 的解，若 $u(x,t)$ 满足：

1. $u \in C(0,T;L^1(R^N)) \bigcap L^\infty(R^N \times (\tau,T)) \bigcap C(\bar{S}_T \setminus \{(0,0)\})$, $u \in L^p_{loc}(0,T;W^{1,p}(R^N))$, $u_t \in L^1(R^N \times (\tau,T)) \quad \forall\, \tau \in (0,T)$；
2. $\int\int_{S_T} (u\eta_t - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\eta + b_i(u)\eta_{x_i} - u^q\eta)dxdt = 0 \quad \forall\, \eta \in C_0^2(S_T)$；
3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \int_{R^N} u(x,t)\psi(x)dx = \psi(0) \quad \forall\, \psi \in C_0^\infty(R^N)$ 。

首先讨论方程 (5) 和下面初值的解

$$u(x,0) = k^N h(kx) \tag{12}$$

其中 $h(x) \in C_0^\infty(R^N)$ ， $h(x) \geqslant 0$ ， $\int_{R^N} h(x)dx = 1$ ， $k > 0$ 。

不失一般性，在本文中我们用 C 表示证明过程中的各种常数。

在这一部分的证明中我们假设定理 1 的条件满足。

记

$$B_R(x_0)=\{x\in R^N:|x-x_0|<R\}.$$

引理 2.1 问题 (5)(12) 存在一个非负解 $u_k\in L^\infty(S_T)\cap C(S_T)$ ，它满足

$$\int_{R^N}u_k(x,t)dx+\int\int_{S_T}u_k^q dxdt\leqslant 1$$

证明 考虑问题 (5)(12) 的逼近问题

$$u_t=div[(|\nabla u|^2+\varepsilon)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u]-\frac{\partial}{\partial x_i}b_i(u)-u^q+\varepsilon^q \qquad (x,t)\in\ B_{\varepsilon^{-1}}\times(0,T) \tag{13}$$

$$u(x,0)=\varepsilon \qquad |x|=\varepsilon^{-1} \tag{14}$$

$$u(x,0)=k^N h(kx)+\varepsilon \qquad x\in B_{\varepsilon^{-1}} \tag{15}$$

其中 $h(x)\in C_0^\infty(B_{\varepsilon^{-1}})$ ， $h(x)\geqslant 0$ ， $\int_{R^N}h(x)dx=1$ ， $k>0$ ， $\varepsilon>0$ 。

由文献 [17] 易知问题 (13)-(15) 有唯一古典解 $u_{k\varepsilon}$ 且

$$\varepsilon<u_{k\varepsilon}<B(k)$$

其中 $B(k)$ 是和 ε 无关的常数。

由文献 [18]，对任意紧集 $K\subset S_T$ ， $\{u_{k\varepsilon}\}$ 在 K 上一致连续。于是在 $\{u_{k\varepsilon}\}$ 中选取子列，仍记为 $\{u_{k\varepsilon}\}$，对任意紧集 $K\subset S_T$

$$u_{k\varepsilon}\to u_k \quad \text{当 } \varepsilon\to 0^+ \text{ 时，在 } C(K) \text{ 中}$$

易证 u_k 是问题 (5)(12) 的解。

令 $v_{k\varepsilon}=u_{k\varepsilon}-\varepsilon$ ，于是 $v_{k\varepsilon}=0$ 在 $|x|=\varepsilon^{-1}$ 上。用 $\frac{v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac12}}$ 乘以 (13) 两端并在 $B_{\varepsilon^{-1}}\times(0,T)$ 积分。注意到

$$\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{\partial}{\partial x_i}b_i(u_{k\varepsilon})\frac{v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac12}}dxdt$$

$$=\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^{v_{k\varepsilon}}b_i'(s+\varepsilon)\frac{s}{(s^2+\eta)^{\frac12}}dsdxdt=0$$

用和文献 [1] 中引理 2.1 类似的方法可得

$$\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}u_{k\varepsilon t}\frac{v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac12}}dxdt=-\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}(|\nabla u_{k\varepsilon}|^2+\varepsilon)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_{k\varepsilon}\nabla[\frac{v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac12}}]dxdt-$$

$$\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{\partial}{\partial x_i}b_i(u_{k\varepsilon})\frac{v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac{1}{2}}}dxdt-\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{u_{k\varepsilon}^q v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac{1}{2}}}dxdt+\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{\varepsilon^q v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac{1}{2}}}dxdt$$

即

$$\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{v_{k\varepsilon}^2+\eta}\,dxdt=\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\sqrt{v_{k\varepsilon}^2(x,T)+\eta}\,dx-\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\sqrt{v_{k\varepsilon}^2(x,0)+\eta}\,dx$$

$$=-\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{(|\nabla u_{k\varepsilon}|^2+\varepsilon)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_{k\varepsilon}|^2\eta}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac{3}{2}}}dxdt-\int_0^T\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}\frac{(u_{k\varepsilon}^q-\varepsilon^q)v_{k\varepsilon}}{(v_{k\varepsilon}^2+\eta)^{\frac{1}{2}}}dxdt$$

令 $\eta\to 0^+$, $\varepsilon\to 0^+$ 得

$$\int_{R^N}u_k(x,t)dx+\int\int_{S_T}u_k^q dxdt\leqslant\int_{R^N}k^N h(kx)dx=1$$

不失一般性，在下面引理的证明中假设 $u_k\in C^2(\bar{S}_T)$ 及 $u_k>0$ 。否则考虑其逼近问题。 □

引理 2.2 问题 (5)(12) 的解 u_k 满足

$$\int_0^T\int_{B_R(x_0)}u_k^{p-1+\frac{p}{N}-\alpha}dxdt<C(\alpha,R)\tag{16}$$

其中 $0<\alpha<\frac{1}{N}$， $C(\alpha,R)$ 是和 x_0 及 k 无关的常数。

证明 设 $\xi(x)\in C_0^\infty(B_{2R})$， $0\leqslant\xi\leqslant 1$， $\xi=1$ 若 $x\in B_R(x_0)$ 。用 $\frac{u_k^\alpha}{1+u_k^\alpha}\xi^p$ 乘以 (5) 两端且在 $R^N\times(0,T)$ 上积分得

$$\begin{aligned}&\int_{R^N}\int_0^{u_k(x,T)}\frac{s^\alpha}{1+s^\alpha}ds\,\xi^p dx+\alpha\int_0^T\int_{R^N}\frac{u_k^{\alpha-1}}{(1+u_k^\alpha)^2}|\nabla u_k|^p\xi^p dxdt=\\&-p\int_0^T\int_{R^N}\frac{u_k^\alpha}{1+u_k^\alpha}|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k\xi^{p-1}\nabla\xi dxdt\\&+p\int_0^T\int_{R^N}\int_0^{u_k}b_i'(s)\frac{s^\alpha}{1+s^\alpha}ds\,\xi^{p-1}\xi_{x_i}dxdt\\&-\int_0^T\int_{R^N}\frac{u_k^{q+\alpha}}{1+u_k^\alpha}\xi^p dxdt+\int_{R^N}\int_0^{k^N h(kx)}\frac{s^\alpha}{1+s^\alpha}ds\,\xi^p dx\end{aligned}\tag{17}$$

注意到

$$\int\int_{S_T}\frac{u_k^\alpha}{1+u_k^\alpha}|\nabla u_k|^{p-1}\xi^{p-1}\nabla\xi dxdt\leqslant\varepsilon\int\int_{S_T}\frac{u_k^{\alpha-1}}{(1+u_k^\alpha)^2}|\nabla u_k|^p\xi^p dxdt$$

$$+C(\varepsilon)\int\int_{S_T}u_k^{p-1+\alpha}|\nabla\xi|^p dxdt+C(\varepsilon)\int\int_{S_T}u_k^{(\alpha+1)(p-1)}|\nabla\xi|^p dxdt$$

又由引理 2.1 得

$$\int_{R^N}\int_0^{k^N h(kx)} \frac{s^\alpha}{1+s^\alpha} ds \xi^p dx \leqslant C$$

由式 (17)，有

$$\int_0^T \int_{R^N} \frac{u_k^{\alpha-1}}{(1+u_k^\alpha)^2} |\nabla u_k|^p \xi^p dxdt \leqslant C\{1+\int\int_{S_T} u_k^{p-1+\alpha} |\nabla\xi|^p dxdt$$

$$+\int\int_{S_T} u_k^{(\alpha+1)(p-1)} |\nabla\xi|^p dxdt + \int\int_{S_T} |\nabla\xi| \xi^{p-1} u_k^m dxdt\} \quad (18)$$

其中假设式 (11) 成立。

令 $u_1 = max\{u_k, 1\}$， $W = u_1^{\frac{p-1-\alpha}{p}}$ ， $r = \frac{p(p-1+\frac{p}{N}-\alpha)}{P-1-\alpha}$ 。

由 Sobolev 嵌入不等式得

$$(\int\int_{S_T} \xi^p W^r)^{\frac{1}{r}} \leqslant C(\int_0^T \int_{R^N} |\nabla(\xi W)|^p dx)^{\frac{\theta}{p}} \sup_{t\in(0,T)} (\int_{B_{2R}} W^{\frac{p}{p-1-\alpha}} dx)^{(1-\theta)\frac{p-1-\alpha}{p}} \quad (19)$$

其中 $\theta = (\frac{p-1-\alpha}{p} - \frac{1}{r})(\frac{1}{N} - \frac{1}{p} + \frac{p-1-\alpha}{p})^{-1}$ 。由式 (19) 得

$$\int\int_{S_T} \xi^p W^r dxdt \leqslant C(\sup_{t\in(0,T)} \int_{B_{2R}} W^{\frac{p}{p-1-\alpha}} dx)^{\frac{(r-p)(p-1-\alpha)}{p}} \int\int_{S_T} |\nabla(\xi W)|^p dxdt$$

因为 $|\nabla W|^p \leqslant C\frac{u_k^{\alpha-1}}{(1+u_k^\alpha)^2}|\nabla u_k|^p$ a.e. 在 $\{u_k \geqslant 1\}$ 上及 $|\nabla W| = 0$ 在 $\{u_k < 1\}$ 上。

所以由引理 2.1 得

$$\int\int_{S_T} |\nabla(\xi W)|^p dxdt \leqslant C\{\int\int_{S_T} |\nabla\xi|^p u_1^{p-1-\alpha} dxdt + \int\int_{S_T} \frac{u_k^{\alpha-1}}{(1+u_k^\alpha)^2} |\nabla u_k|^p \xi^p dxdt\} \quad (20)$$

于是由式 (18)(20) 得

$$\int\int_{S_T} \xi^p u_1^{p-1+\frac{p}{N}-\alpha} dxdt \leqslant C\{1+\int\int_{S_T} |\nabla\xi|^p u_1^{p-1-\alpha} dxdt + \int\int_{S_T} |\nabla\xi| \xi^{p-1} u_k^m dxdt$$

$$+\int\int_{S_T} u_k^{(\alpha+1)(p-1)} |\nabla\xi|^p dxdt\} \quad (21)$$

因为 $(\alpha+1)(p-1) < p-1+\frac{p}{N}-\alpha$, 取 $\xi = \psi^\beta$, 其中 $\psi \in C_0^\infty(B_{2R})$ ， $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ ， $\psi = 1$ 若 $x \in B_R$ ， $\beta = \frac{N(p-1+\frac{p}{N}-\alpha)}{p}$, 将其代入式 (21) 。应用 Young 不等式, 即得式 (16) 。□

引理 2.3 问题 (5)(12) 的解 u_k 满足

$$u_k(x,t) \leqslant C^* t^{-\frac{1}{q-1}} \quad (22)$$

其中 $C^*=(\frac{1}{q-1})^{\frac{1}{q-1}}$ 。

证明 因为 $C^*t^{-\frac{1}{q-1}}$ 是 (5) 的解，利用比较原理可以得到 (22) 。 □

引理 2.4 设 $\overline{B_R(x_0)}\subset R^N\backslash\{0\}$ 以及 $0<r<1+\frac{p}{N}$ 。问题 (5)(12) 的解 u_k 满足

$$\int_0^T\int_{B_R(x_0)}u_k^n dxdt\leqslant C(R)\quad\forall\ n>0 \tag{23}$$

$$\sup_{B_R(x_0)\times(0,T)}u_k\leqslant C(r)\{\int_0^T\int_{B_R(x_0)}u_k^{p-2+r}dxdt\}^{\frac{1}{r}}\quad 若\ m\leqslant p-1 \tag{24}$$

$$\sup_{B_R(x_0)\times(0,T)}u_k\leqslant C(r)\{\int_0^T\int_{B_R(x_0)}u_k^{\frac{N(m-p+1)}{p}+r}dxdt\}^{\frac{1}{r}}\quad 若\ m>p-1 \tag{25}$$

$$\int_0^T\int_{B_R(x_0)}|\nabla u_k|^p dxdt\leqslant C(R) \tag{26}$$

其中 k 足够大。

证明 设 $\xi(x)\in C_0^2(R^N)$ ， $0\leqslant\xi\leqslant1$ ， $supp\xi\subset R^N\backslash\{0\}$ ， $\xi=1$ 在 $B_R(x_0)$ 上。用 $\xi^p u_k^r$ $(r>0)$ 乘以 (5) 两端且在 $R^N\times(0,t)$ 积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r+1}\int_{R^N}\xi^p u_k^{r+1}(x,t)dx+r\int_0^t\int_{R^N}|\nabla u_k|^p u_k^{r-1}\xi^p dxds\\&\quad+p\int_0^t\int_{R^N}|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k u_k^r\xi^{p-1}\nabla\xi dxds\\&=\frac{1}{r+1}\int_{R^N}\xi^p(k^N h(kx))^{r+1}dx+p\int_0^t\int_{R^N}\int_0^{u_k}b_i^{'}(\tau)\tau^r d\tau\xi^{p-1}\xi_{x_i}dxds\\&\quad-\int_0^t\int_{R^N}u_k^{q+r}\xi^p dxds\end{aligned} \tag{27}$$

因为

$$\begin{aligned}\int\int_{S_T}|\nabla u_k|^{p-1}u_k^r\xi^{p-1}|\nabla\xi|dxdt&\leqslant\varepsilon\int\int_{S_T}|\nabla u_k|^p u_k^{r-1}\xi^p dxdt\\&+C(\varepsilon)\int\int_{S_T}u_k^{p-1+r}|\nabla\xi|^p dxdt\end{aligned}$$

又 $supp\xi\subset R^N\backslash\{0\}$ ， $h(x)\in C_0^\infty(R^N)$ ，则 k 足够大时有

$$\xi^p k^N h(kx)=0.$$

所以，由 (27) 得

$$\sup_{0<t<T}\int_{R^N}\xi^p u_k^{r+1}dx+\int\int_{S_T}|\nabla u_k^{\frac{p-1+r}{p}}|^p\xi^p dxdt$$